Leçon 10.1
Oscillateur Généralisé Forcé

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

EPFL

École polytechnique fédérale de Lausanne

Introduction

- Forcé Conservatif
- Forcé Dissipatif
- Analyse Modale Expérimentale

Chapitre 14
Généralisé nDDL Conservatif
Régime Forcé

Généralisé Conservatif – Régime Forcé

Formulation du *régime forcé* de l'oscillateur généralisé conservatif d'ordre n

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + [K]\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

$\boldsymbol{f}(t)$ vecteur d'ordre n des forces externes

Découplage du régime forcé par décomposition du vecteur déplacement $\boldsymbol{x}$ dans la *base modale*

$$[M][B]\ddot{\boldsymbol{q}} + [K][B]\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$$

$\boldsymbol{q}$ vecteur des coordonnées modales

Prémultiplication par la matrice $[B]^T$

$$[B]^T[M][B]\ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^T[K][B]\boldsymbol{q} = [B]^T\boldsymbol{f}$$

$$[M^o]\ddot{\boldsymbol{q}} + [K^o]\boldsymbol{q} = [B]^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^o$$

$[M^o]$ matrice diagonale des masses modales

$[K^o]$ matrice diagonale des rigidités modales

$\boldsymbol{f}^o$ vecteur des forces modales

Généralisé Conservatif – Régime Forcé

Reformulation du régime forcé de l'oscillateur généralisé conservatif

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[M^o\right]^{-1}\left[K^o\right]\boldsymbol{q} = \left[M^o\right]^{-1}\boldsymbol{f}^o$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \left[\Delta\right]\boldsymbol{q} = \left[M^o\right]^{-1}\boldsymbol{f}^o$$

$\left[\Delta\right] = \left[\Omega_0^2\right]$ matrice diagonale des carrés des pulsations propres

Découplage du régime forcé en n équations indépendantes

$$\ddot{q}_p + \omega_{0p}^2\, q_p = \frac{1}{m_p^o} f_p^o(t) \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

Résolution des n équations par la méthode de Laplace ou l'intégrale de convolution (conditions initiales supposées nulles)

$$q_p = \frac{1}{m_p^0 \omega_{0p}} \int_0^t f_p^o(t-u) \sin \omega_{0p} u \, du$$

$$(p = 1, 2, \dots, n)$$

Généralisé Conservatif – Régime Forcé

Retour aux coordonnées spatiales $x = [B]q$ pour la solution du régime forcé (conditions initiales supposées nulles)

$$x = \sum_p^n B_q \frac{1}{m_p^o\,\omega_p} \int_0^t f_p^o(t-u)\sin\omega_{0p}u\,\mathrm{d}u$$

Solution générale du régime forcé avec conditions initiales non nulles

$$x = \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \beta_q \left(\frac{1}{\omega_{0p}} \int_0^t f_p^o(t-u)\sin\omega_{0p}u\,\mathrm{d}u + \beta_p^T[M]X_0\cos\omega_{0p}t + \frac{1}{\omega_{0p}}\beta_p^T[M]V_0\sin\omega_{0p}t \right) \qquad (14.10)$$

avec

$$f_p^o = B_p^T f = \beta_p^T f \qquad (14.7)$$

Chapitre 14
Généralisé nDDL Dissipatif (Caughey)
Régime Forcé

Généralisé Dissipatif – Régime Forcé

Dans la base modale:

$$\ddot{\vec{q}} + [M^0]^{-1}[C^0]\dot{\vec{q}} + [M^0]^{-1}[K^0]\vec{q} = [M^0]^{-1}\vec{F}^0(t)$$

$$\ddot{\vec{q}} + [2\Lambda]\dot{\vec{q}} + [\Delta]\vec{q} = [M^0]^{-1}\vec{F}^0(t)$$

$$[M^0] = [B]^T[M][B];\ [K^0] = [B]^T[K][B];\ [C^0] = [B]^T[C][B]$$

$$\vec{x} = [B]\vec{q} \leftrightarrow \vec{q} = [B]^{-1}\vec{x}$$

$$\vec{F}^0 = [B]^T\vec{F}$$

Généralisé Dissipatif – Régime Forcé

Système découplé: équation du mode de rang p (sous-amorti)

$$\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + {\omega_{0p}}^2 q_p = \frac{1}{m_p^0} \vec{\beta}_p^T \vec{F}(t) = \frac{1}{m_p^0} f_p^0(t)$$

$$\lambda_p = \frac{c_p^0}{2m_p^0}, \eta_p = \frac{\lambda_p}{\omega_{0p}}, \omega_p = \omega_{0p}\sqrt{1-\eta_p^2}$$

$$q_p(t) = \frac{1}{m_p^0 \omega_p} \int_0^t f_p^0(t-u) \sin(\omega_p u)\, du + \frac{e^{-\lambda_p t}}{m_p^0} \left(\overrightarrow{\beta_p^T} [M] \overrightarrow{X_0} \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p} \overrightarrow{\beta_p^T} [M] \left(\overrightarrow{V_0} + \lambda_p \overrightarrow{X_0} \right) \sin(\omega_p t) \right)$$

Régime Forcé Permanent (Harmonique)

$$\ddot{q}_p + 2\lambda_p \dot{q}_p + {\omega_{0p}}^2 q_p = \frac{1}{m_p^0} \vec{\beta}_p^T \vec{F}(t) = \frac{1}{m_p^0} f_p^0(t)$$

Passage dans le domaine de *Fourier (ou Laplace)*

$$q_p(t) \to Q_p(j\omega), f_p^0 \to F_p^o(j\omega)$$

$$Q_p(j\omega) = Y_{pp}^0(j\omega) F_p^0(j\omega)$$

$avec$:

$$Y_{pp}^0(j\omega) = \frac{1}{m_p^0(-\omega^2 + 2\lambda_p j\omega + {\omega_{0p}}^2)} = \frac{1}{m_p^0({\omega_{0p}}^2 + 2j\eta_p \omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

Fonction de transfert

$$Q_p(j\omega) = Y_p(j\omega)F_p^0(j\omega)$$

$avec$:

$$Y_{pp}^0(j\omega) = \frac{1}{m_p^0(-\omega^2 + 2\lambda_p j\omega + {\omega_{0p}}^2)} = \frac{1}{m_p^0({\omega_{0p}}^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

Retour en base physique: combinaison linéaire des solutions modales

$$\vec{X}(j\omega) = \sum_{p=I}^{n} \vec{\beta}_p Q_p(j\omega) = \sum_{p=I}^{n} \vec{\beta}_p \frac{F_p^0(j\omega)}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + {\omega_{0p}}^2)}$$

$$= \sum_{p=I}^{n} \vec{\beta}_p \frac{\vec{\beta}_p^T \vec{F}(j\omega)}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + {\omega_{0p}}^2)} = \left[\sum_{p=I}^{n} \frac{\vec{\beta}_p \vec{\beta}_p^T}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + {\omega_{0p}}^2)}\right] \vec{F}(j\omega)$$

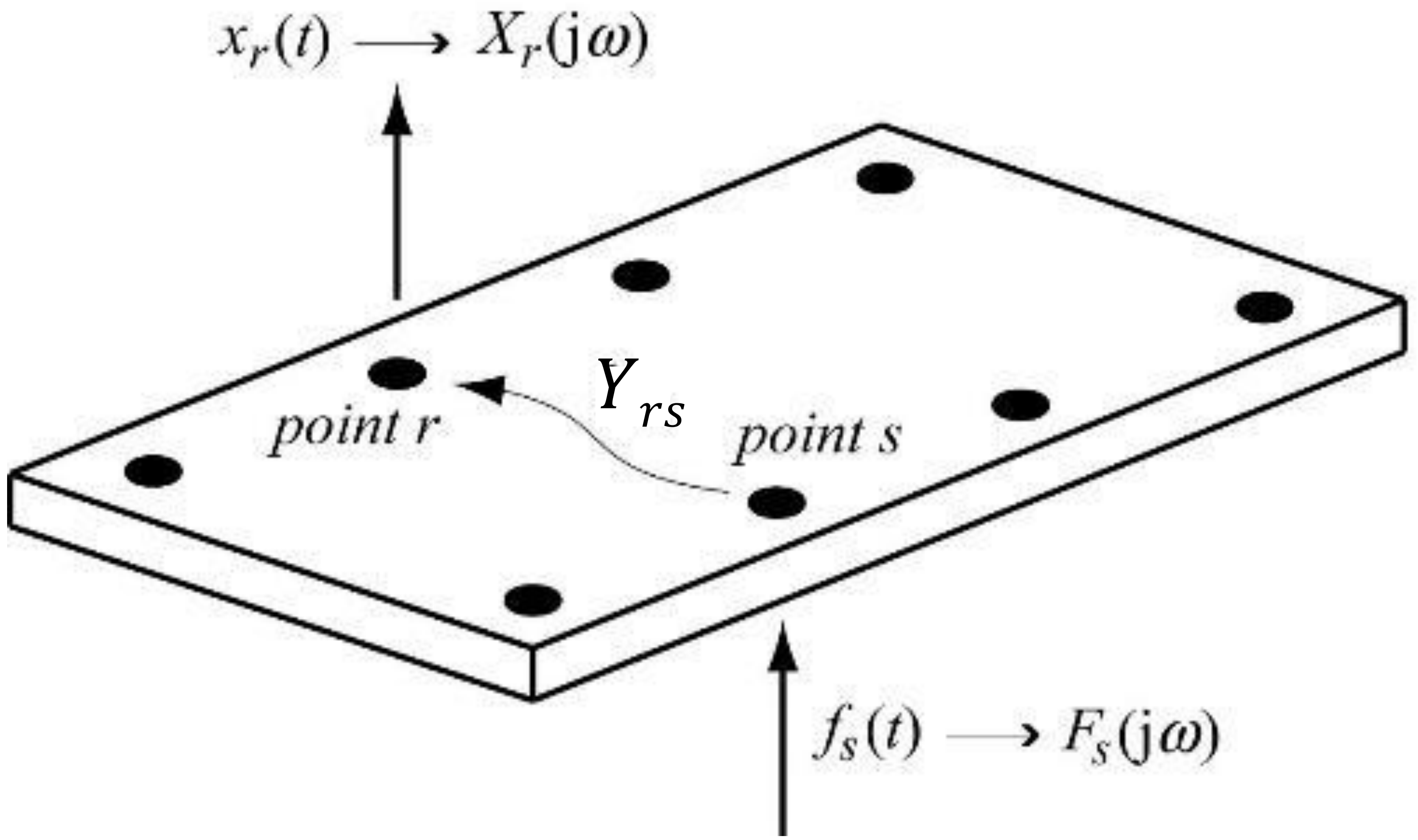
$$= [Y](j\omega)\vec{F}(j\omega)$$

Fonction de transfert

Admittance / Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) ou de transfert :

$$[Y](j\omega) = \frac{\vec{X}(j\omega)}{\vec{F}(j\omega)} = \sum_{p=I}^{n} \frac{\vec{\beta}_p^T \otimes \vec{\beta}_p}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + {\omega_{0p}}^2)}$$

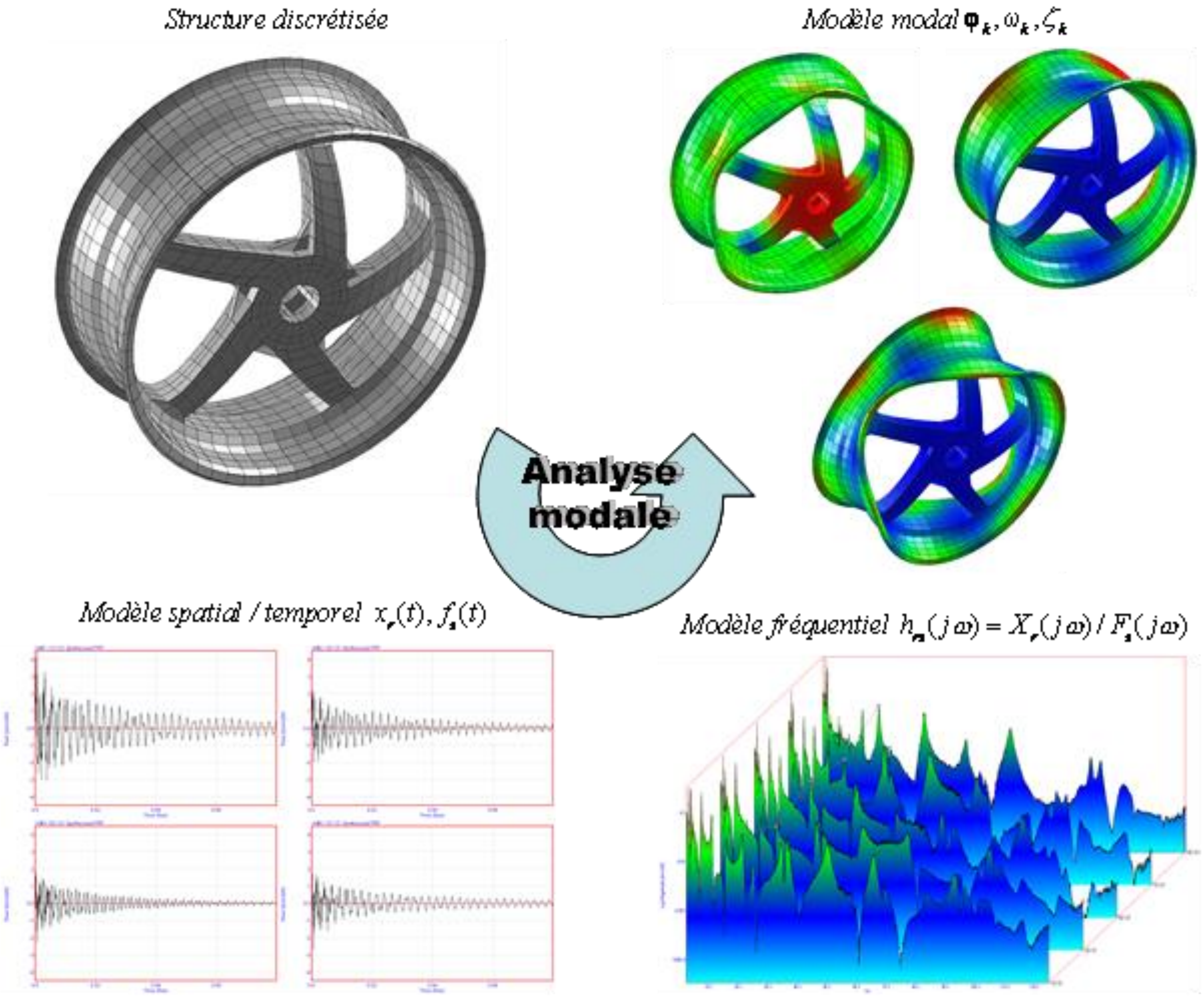
$$Y_{rs}(j\omega) = \frac{X_r(j\omega)}{F_s(j\omega)} = \sum_{p=I}^{n} \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0(-\omega^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega + {\omega_{0p}}^2)}$$



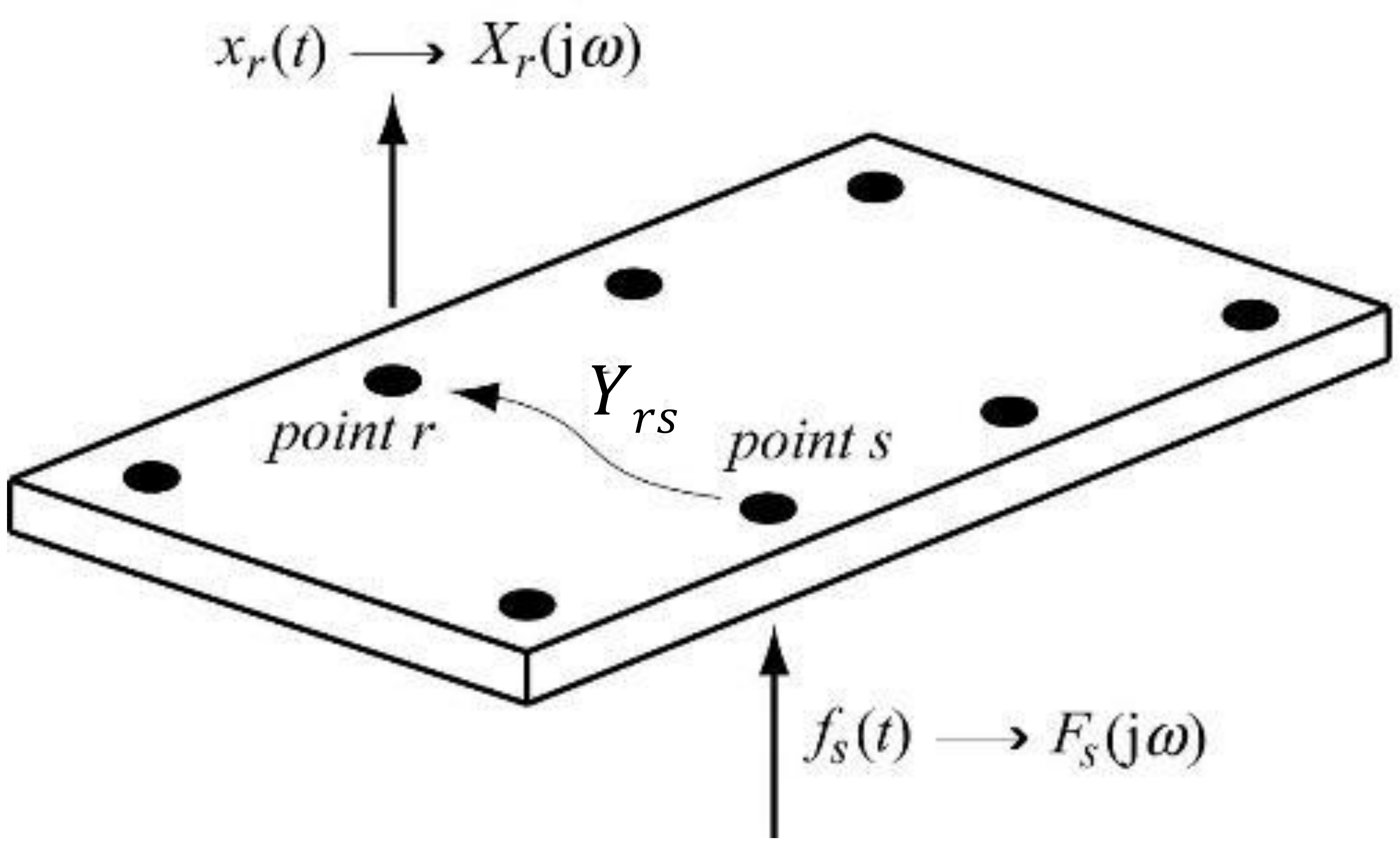
Au voisinage du mode *p*:

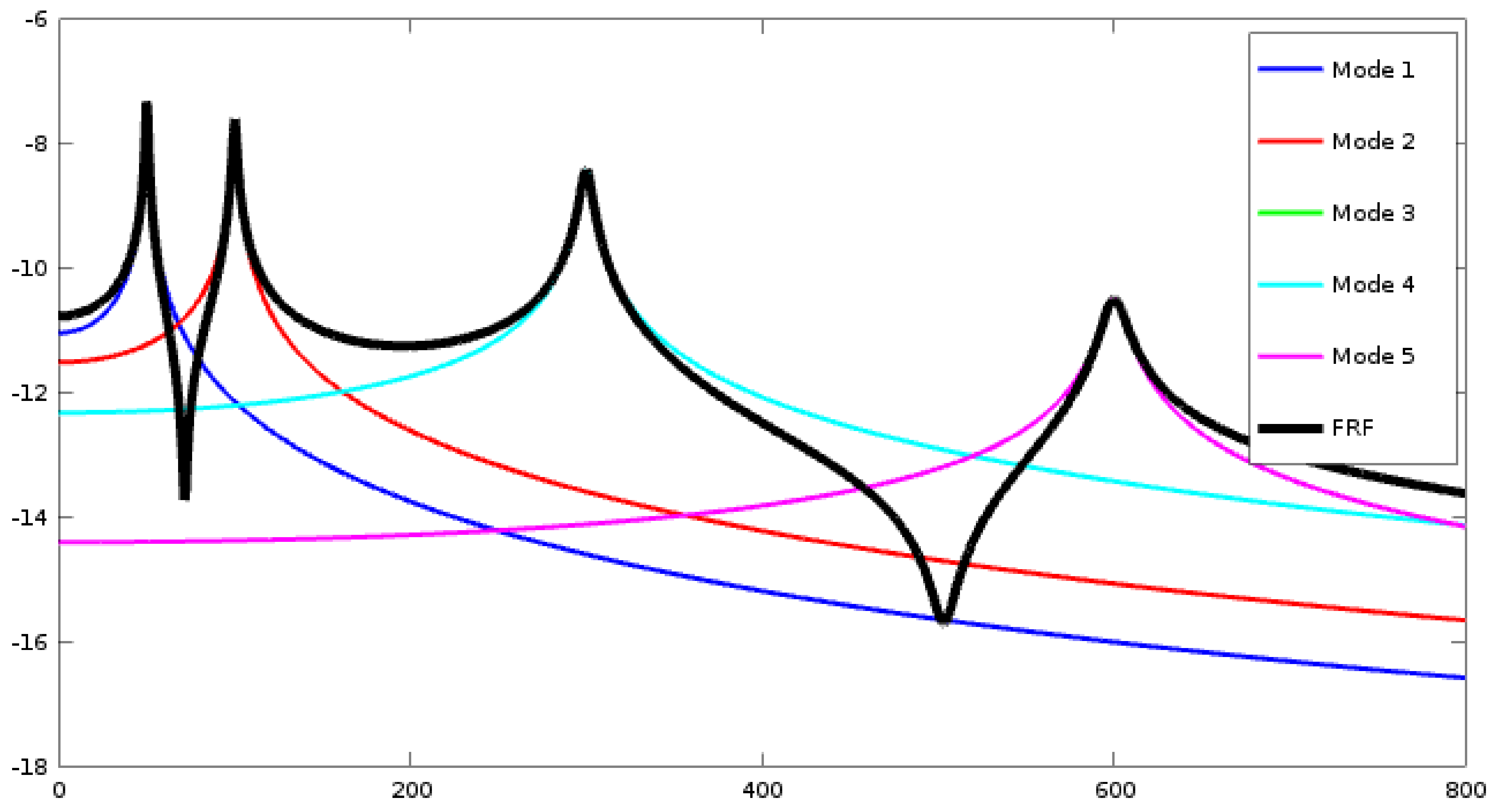
$$Y_{rs} = {Y_{rs}}^I + .. + {Y_{rs}}^n \cong {Y_{rs}}^p = \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0(\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

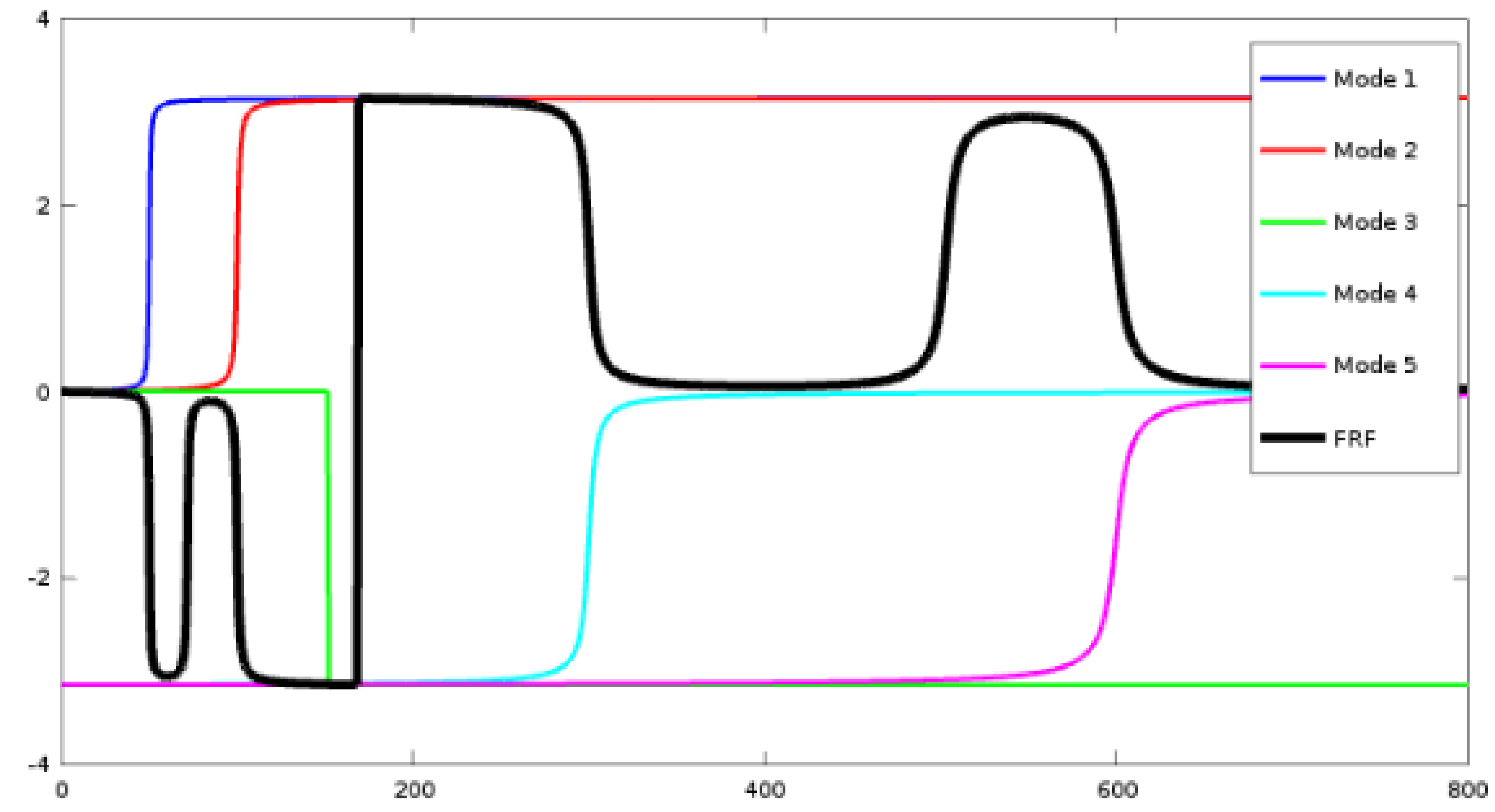
Analyse Modale Expérimentale



Analyse Modale Expérimentale





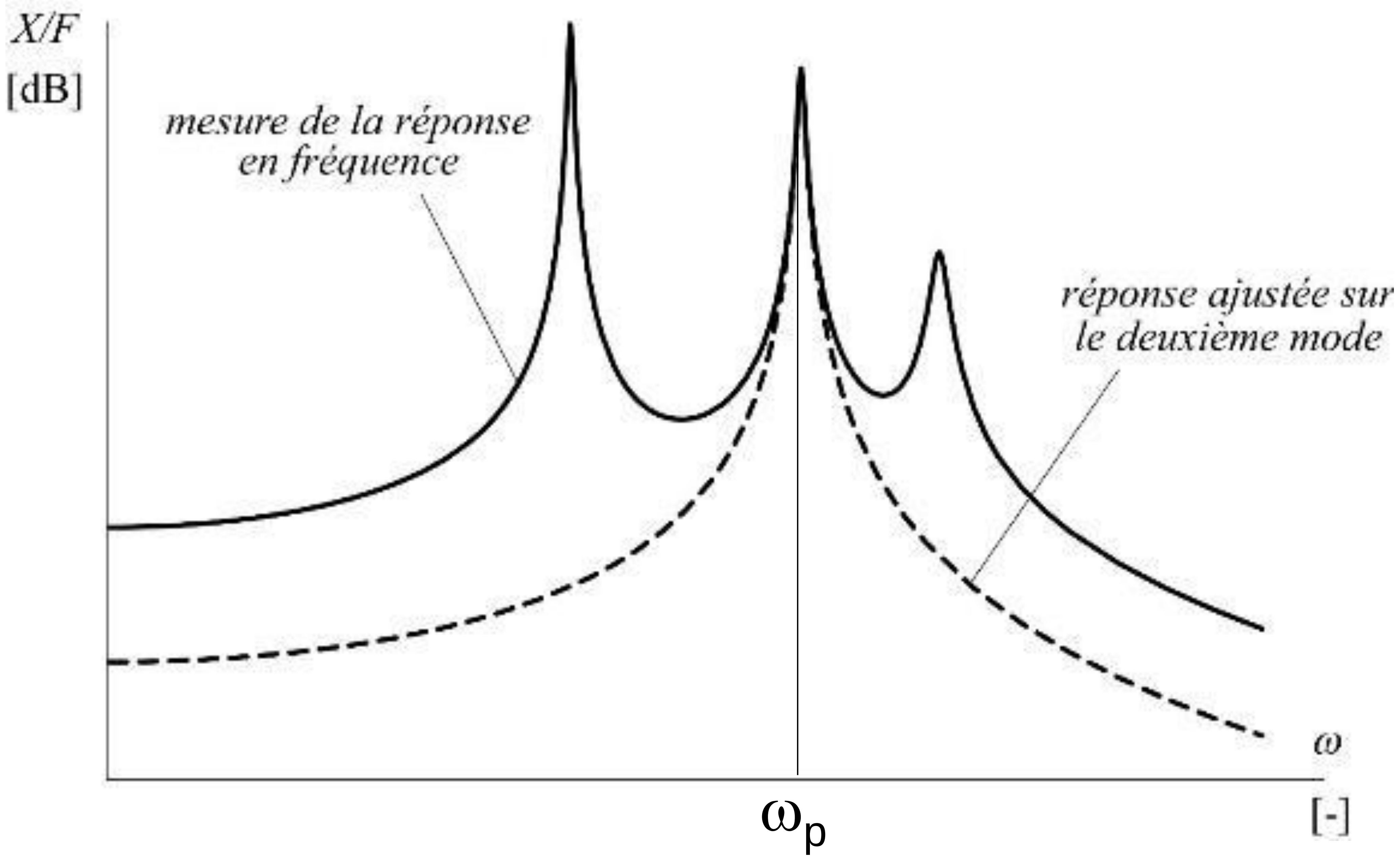


Analyse Modale – Fréquences Propres

Au voisinage du mode p:

$$Y_{rs} = Y_{rs}{}^{I} + .. + Y_{rs}{}^{n} \cong Y_{rs}{}^{p} = \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0(\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

Mesure des *pulsations propres*

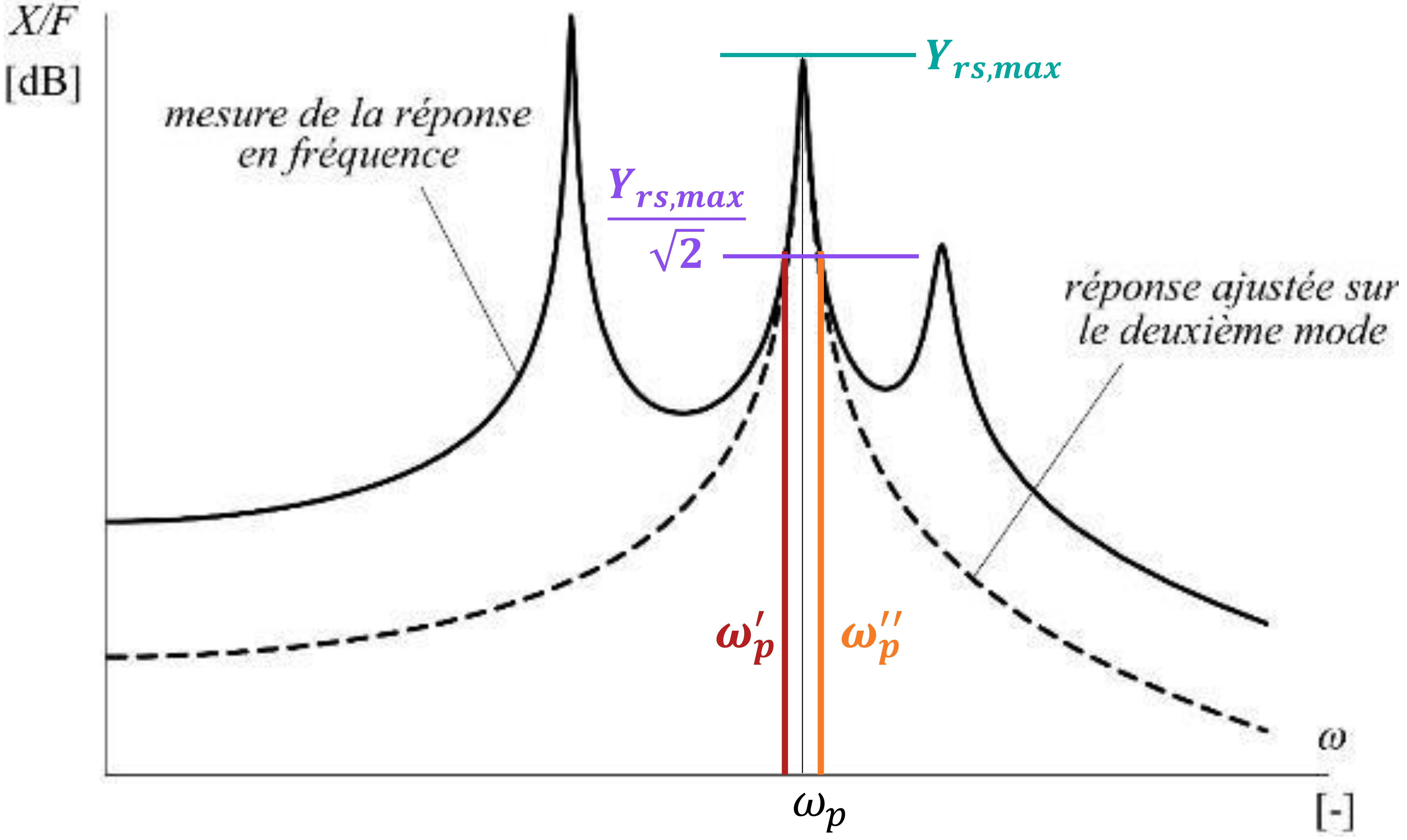


Analyse Modale – Amortissements Modaux

Au voisinage du mode p:

$$Y_{rs} = {Y_{rs}}^{I} + .. + {Y_{rs}}^{n} \cong {Y_{rs}}^{p} = \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{m_p^0(\omega_{0p}^2 + 2j\eta_p\omega_{0p}\omega - \omega^2)}$$

$$\eta_p = \frac{\omega_p'' - \omega_p'}{\omega_p'' + \omega_p'}$$



Analyse Modale – Vecteurs Propres

A la résonnance du mode p:

$$Y_{rs}(\omega_p) \approx Y_{rs}^p(\omega_p) \approx \frac{\beta_r^p \beta_s^p}{2j\eta_p m_p^0 \omega_p^2} \Rightarrow \boxed{\beta_s^p \propto Y_{rs}(\omega_p)} \quad \boxed{\beta_r^p \propto Y_{rs}(\omega_p)}$$